BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.К.ГАСАНОВ, Т.М.ГАСЫМОВ
Бакинский Государственный Университет
telman_bsu@box.az

При исследовании ряда задач, описывающих процесс гашения пульсаций потоков газа или жидкости в длинных трубопроводах, в процессах гашения отклонения в некоторой колебательной среде возникает задача оптимального управления для одномерной краевой задачи с нелокальными граничными условиями для гиперболического уравнения. В данной работе исследуется управляемость одной задачи управления, описываемой уравнением гиперболического типа, при отсутствии ограничений на управление.

Пусть объект управления в области $D_T = \{(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ описывается уравнением

$$z_{tt}(x,t) = z_{xx}(x,t) + u, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$z(x,0) = \varphi(x),\ z_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$z(0,t) = \mu(t),\ z_x(1,t) - z_x(0,t) = \eta(t), \tag{3}$$

где $u(x,t)$ – управление.

В дальнейшем в качестве допустимого управления $u(x,t)$ будем рассматривать функции из пространства $L_2(D_T)$, а решение задачи (1)-(3) для заданного управления понимается в обобщенном смысле.

При заданных допустимых управлениях $u(x,t)$ и функций $\varphi(x) \in W_2^{(1)}(0,1), \mu(t) \in W_2^{(1)}(0,T), \varphi(0) = \mu(0),\ \psi(x) \in L_2(0,1),\ \ \eta(t) \in L_2(0,T)$, под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается функция $z(x,t) \in W_2^{(1)}(D_T),\ z(x,0) = \varphi(x),\ z(0,t) = \mu(t)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству[2]:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{D_T}[z_t(x,t)\phi_t(x,t) - z_x(x,t)\phi_x(x,t) + u(x,t)\phi(x,t)]dxdt + \\ + \int_0^1 \psi(x)\phi(x,0)dx + \int_0^T \eta(t)\phi(0,t)dt = 0\end{gathered} \tag{4}$$

при любой $\phi(x,t) \in W_2^{(1)}(D_T),\ \phi(1,t) = \phi(0,t), \phi(x,T) = 0$.

Для нахождения обобщенного решения задачи (1)-(3) применим метод, используемый в работе [1]. Тогда будем иметь:

$$z_u(x,t)=z_1(x,t)+z_2(x,t), \tag{5}$$

где

$$z_1(x,t)=\int_0^1 G_t(x,s,t)\varphi(s)ds+\int_0^1 G(x,s,t)\psi(s)ds+$$
$$+\int_0^t F(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+\int_0^t F_1(x,t-\tau)\eta(\tau)d\tau, \tag{6}$$

$$z_2(x,t)=\int_0^t\int_0^1 G(x,s,t-\tau)u(s,\tau)dsd\tau, \tag{7}$$

$$G\ (x,s,t-\tau)=(t-\tau)Y_0(s)X_0(x)+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi k}\sin 2\pi k(t-\tau)Y_{2k}(s)+\left(\frac{1}{2\pi k}(t-\tau)\cos 2\pi k(t-\tau)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4\pi^2k^2}\sin 2\pi k(t-\tau)\right)Y_{2k-1}(s)\right]X_{2k}(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi k}\sin 2\pi k(t-\tau)Y_{2k-1}(s)X_{2k-1}(x), \tag{8}$$

$$F(x,t)=4\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2\pi kt X_{2k}(x),$$
$$F_1(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi^2k^2}\sin 2\pi kt-\frac{2}{\pi k}t\cos 2\pi kt\right]X_{2k}(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}\sin 2\pi kt X_{2k-1}(x)+2tX_0(x),$$

где системы

$$X_0(x)=x,\ \ X_{2k-1}(x)=x\cos 2\pi kx,\ \ X_{2k}(x)=\sin 2\pi kx,$$

являются собственные и присоединенные функции краевой задачи [1]:

$$X''+\lambda X=0,$$
$$X(0)=0,\ X'(0)=X'(1).$$

Системы

$$Y_0(x)=2,\ \ Y_{2k-1}(x)=4\cos 2\pi kx,\ \ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin 2\pi kx$$

являются собственные и присоединенные функции сопряженной краевой задачи.

Определение [3]. Если для всех $u(x,t)\in L_2(D_T)$ множество решений задачи (1)-(3) является всюду плотным в пространстве $W_2^1(D_T)$, то система, состояние которой определяется как решение задачи (1)-(3), называется управляемой.

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть управление $u(x,t)$ пробегает пространство $L_2(D_T)$. Тогда наблюдение $z(x,t)$ заметает некоторое подпространство L, плотное в пространстве $L_2(D_T)$, т.е. система (1) управляема.

Доказательство. Докажем, что не существует элемента $h(x,t)\in L_2(D_T)$, отличного от нулевого, ортогонального всему множеству решений задачи (1)-(3), т.е. при всех $u(x,t)\in L_2(D_T)$, имеет место:

$$\iint_{D_T} h(x,t)(z_u(x,t)-z_1(x,t))dxdt=0\,, \tag{9}$$

где $z_1(x,t)$ определяется формулой (6). Учитывая равенства (5), (7), имеем:

$$\iint_{D_T} h(x,t)\left(\int_0^t\int_0^1 G\ (x,s,t-\tau)u(s,\tau)dsd\tau\right)dxdt=0\,. \tag{10}$$

Меняя порядок интегрирования получаем:

$$\iint_{D_T} u(x,t)\left(\int_t^T\int_0^1 G\ (s,x,t-\tau)h(s,\tau)dsd\tau\right)dxdt=0. \tag{11}$$

Отсюда, в силу того, что $u(x,t)\in L_2(D_T)$ произвольная функция, имеем:

$$\eta(x,t)=\int_t^T\int_0^1 G\ (s,x,t-\tau)h(s,\tau)dsd\tau=0. \tag{12}$$

Так как $G\ (x,s,t-\tau)$ определяется формулой (8), то $\eta(x,t)$ является решением задачи:

$$\eta_{tt}(x,t)=\eta_{xx}(x,t)+h(x,t), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\eta(x,T)=0,\ \eta_t(x,T)=0,\\ \eta(0,t)=\eta(1,t),\ \eta_x(1,t)=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда следует, что $h(x,t)=0$ при почти всех $(x,t)\in D_T$. Это означает, что множество решений $z_u(x,t)$ является всюду плотным в пространстве $W_2^1(D_T)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу управляемости в случае, когда $\psi(x)$ является управлением, а остальные данные известны.

Теорема 2. Пусть управление $\psi(x)$ пробегает пространство $L_2(0,1)$ и T -иррациональное число. Тогда финальное наблюдение $z_\psi(x,T)$ заметает некоторое подпространство L, плотное в пространстве $L_2(0,1)$, т.е. система (1) управляема.

Доказательство. При заданном управлении $\psi(x)\in L_2(0,1)$ решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$z_\psi(x,t)=\int_0^1 G(x,s,t)\psi(s)ds+\omega(x,t), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}\omega(x,t)=&\int_0^1 G_t(x,s,t)\varphi(s)ds+\int_0^t F(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+\\ &+\int_0^t F_1(x,t-\tau)\eta(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G\ (x,s,t-\tau)u(s,\tau)dsd\tau.\end{aligned} \tag{16}$$

Пусть функция $h(x)\in L_2(0,1)$ ортогональна подпространству L. Тогда имеем:

$$\int_0^1 h(x)\left(z_\psi(x,T)-\omega(x,T)\right)dx=0,\ \forall\,\psi(x)\in L_2(0,1). \tag{17}$$

Подставляя (15) в (17) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^1 h(x)\left(\int_0^1 G(x,s,T)\psi(s)ds\right)dx=\int_0^1 \psi(x)\left(\int_0^1 G(s,x,T)h(s)ds\right)dx\ . \tag{18}$$

Можно доказать, что функция $y(x,t)=-\int_0^1 G(s,x,T-t)h(s)ds$ является решением следующей задачи:

$$y_{tt}(x,t)=y_{xx}(x,t), \tag{19}$$

$$y(x,T)=0,\ y_t(x,T)=h(x), \tag{20}$$

$$y_x(1,t)=0,\ y(1,t)=y(0,t). \tag{21}$$

Учитывая условие (17), из равенства (18) получаем:

$$\int_0^1 y(x,0)\psi(x)dx=0\ . \tag{22}$$

Отсюда, в силу произвольности функции $\psi(x)\in L_2(0,1)$, имеем:

$$y(x,0)=0\ . \tag{23}$$

Из условия (23), учитывая, что T иррациональное число, получаем $h(x)=0$. Отсюда следует, что подпространство L всюду плотно в $L_2(0,1)$, т.е. система управляема.

Теперь рассмотрим вопрос об управляемости с помощью граничного управления. Для этого предположим, что функция $\eta(t)$ является управлением из $L_2(0,T)$, а остальные функции заданные. Докажем, что когда управление $\eta(t)$ пробегает пространство $L_2(0,T)$, финальное наблюдение $z_\eta(x,T)$ заметает некоторое подпространство L, плотное в $L_2(0,1)$. В данном случае решение $z_\eta(x,t)$ можно представить в виде

$$z_\eta(x,t)=\int_0^t F_1(x,t-\tau)\eta(\tau)d\tau+g(x,t), \tag{24}$$

где

$$g(x,t)=\int_0^1 G_t(x,s,t)\varphi(s)ds+\int_0^1 G(x,s,t)\psi(s)ds+\int_0^t F(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G(x,s,t-\tau)u(s,\tau)dsd\tau.$$

Пусть функция $h(x)\in L_2(0,1)$ ортогональна подпространству L:

$$\int_0^1 h(x)\left(z_\eta(x,T)-g(x,T)\right)dx=0 \quad \forall\,\eta(t)\in L_2(0,T). \tag{25}$$

Пусть $y(x,t)$ является обобщенным решением задачи (19)-(21).
Тогда имеем:

$$\int_0^1 h(x)\left(z_\eta(x,T)-g(x,T)\right)dx+\int_0^T \eta(t)\,y(0,t)dt=0.$$

Отсюда, учитывая равенство (25), получаем

$$\int_0^T \eta(t)\,y(0,t)dt=0 \quad \forall\,\eta(t)\in L_2(0,T).$$

Из обобщенного решения задачи (19)-(21), в силу $y(0,t)=0$, $t\in[0,T]$, получаем, что $h(x)=0$. Следовательно, система (1) управляема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием//ДУ, 1977, т. 13, №2, с. 294-304.
2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 279 с.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.

KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN İDARƏOLUNMA HAQQINDA

K.Q.HƏSƏNOV, T.M.QASIMOV

XÜLASƏ

Uzun borukeçiricilərdə qaz və ya maye axınının pulzasiyasının söndürülməsi prosesində, müəyyən rəqs edən mühitlərdə kənara çıxmaların söndürülməsi proseslərində qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklər üçün idarəetmə məsələləri meydana çıxır. İşdə bir hiperbolik tənlik üçün idarəolunma məsələsinə baxılır.

ON THE CONTROLLABILITY FOR THE WAVE EQUATION BY NON-CLASSIC BOUNDARY CONDITION

K.K.HASANOV, T.M.GASIMOV

SUMMARY

While investigating a series of problems describing the dampening process of gas or liquid flow pulsations in long pipelines, in the process of deviation dampening in some vibrating medium there arises a control problem for non-local boundary conditions for a hyperbolic equation. In this paper we study the controllability problem for the hyperbolic type equation.